Colegio Santa Bárbara
Formando emprendedores que suben escalones

Funciones y procesos infinitos IV medio

CALCULAR TÉRMINOS, SUMAS Y TÉRMINOS ENÉSIMO DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

UNIDAD 1: Funciones Trigonométricas y polinomiales

OBJETIVO DE APRENDIZAJE:
Conocerlas sucesiones, progresiones aritméticas y geométricas; aplican algunas propiedades en la resolución de problemas.

OBJETIVO: Calcular elementos de una progresión geométrica usando la definición y en la resolución de problemas.

HABILIDADES: Reconocer – Aplicar – Resolver - Calcular

NESTOR ALBANO
nalbano1@Gmail.com

Definición de progresiones geométricas

Una progresión geométrica es un tipo de sucesión, es decir, una colección ordenada e infinita de números reales, donde cada término se obtiene multiplicando una cantidad constante al término anterior.

Ejemplo:

Si consideramos la sucesión que tiene como primeros términos:

$$a=(3,6,12,24,48.....)$$

y hacemos el cociente de cada término por el anterior,

a_2 / a_1 $\qquad$ $a_3 / a_2 =$

$a_4 / a_3 =$ $\qquad$ $a_5 / a_4 =$

Podemos ver que este cociente es siempre un mismo número: 2. Así que podemos definir esta sucesión de forma recursiva multiplicando por 2 para obtener el siguiente.

Haciendo una definición formal, diremos que una progresión geométrica, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, es una sucesión en que el cociente entre dos términos consecutivos es constante, es decir:

$a_{n+1}/a_n = r$, donde r se denomina razón de la progresión

Ejemplo:

a) La progresión: (1,3,9,27,81,243…..) , es una progresión geométrica de razón. $r = 3$

b) La progresión: ($1/2$, 1, 2,4, 8, 16, 32….) , es una progresión geométrica de razón. $r = 2$

c) La progresión: (1, $1/4$,$1/16$, $1/64$,$1/256$ ……), es una progresión geométrica de razón. $r= 1/4$

Todos los términos se obtienen multiplicando el anterior por la razón.

Término general de una progresión geométrica.

El término general de una sucesión es la expresión a_n que permite conocer cualquier término en función de su posición n.

Si conoces al primer término a_1 y a la razón r . En este caso es posible conocer a cualquier otro término de la progresión con el uso de la siguiente fórmula:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

***Ejemplo 1**:*

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ (Formula)

1) Tienes la siguiente progresión, y te piden calcular el valor del término de la posición 12,14 y 20, quiero decir:
a) **a_{12} = ?** **b)** **a_{14}** = ? c) **a_{20}** =?

3, 6, 12, 24, 48, ...

Solución

Identifica que a_1=*3*, la razón *r =2* y como te piden conocer el valor del término 12, entonces *n=12*; al sustituir estos valores en la fórmula obtienes que:

a) $a_{12} = 3\cdot 2^{12-1} = 3\cdot 2^{11} = 3 . 2048= 6144$

Por lo tanto, el valor del término 12 es 6144 entonces $a_{12=}$ 6144

b) **$a_{14} = 3\cdot 2^{14-1} = 3\cdot 2^{13} = 3 . 8192= 24576$**

Por lo tanto, el valor del término 14 es 24576 entonces $a_{14=}$ 24576

c) $a_{20} = 3\cdot 2^{20-1} = 3\cdot 2^{19}$ = 1, 572, 864

Por lo tanto, el valor del término 20 es 1, 572, 864 entonces $a_{20=}$ 1, 572, 864

Suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica.

Para lograr sumar a *n* términos consecutivos de una progresión geométrica, primero se necesita conocer la razón *r*, al primer término a_1 , y al número de valores *n* que se desea sumar de la sucesión.
Ya que se conocen estos datos se hace uso de la fórmula:

$$S_{n} = a_{1}\ r^{n} - 1/r - 1$$

donde S_n es la suma de *n* términos consecutivos de una progresión geométrica.

Ejemplo 2*:* Calcular la suma de los primeros 5 y 14, (quiere decir que calculemos S_{5} y S_{14}) términos de la siguiente progresión: **3, 6, 12, 24, 48, ...**

a) S_{5}
b) S_{14}

Se calcula a la razón *r*, dividiendo a dos valores consecutivos, como se vio en un principio

r=6/3 =2

ahora con *r=2*, *n=5* y $a_1 = 3$ se sustituyen los valores en la fórmula, obteniendo que:

$$\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{S_{5} = 3.\ 2^{5} - 1/2 - 1 = 3.\ 32 - 1/1 = 3.31/1 = 93/1 = 93}\ ,$$

entonces $\mathbf{S_{5} = 93}$

a) $S{\downarrow}14 = 3.\ 2{\uparrow}14\ -1/2-1\ = 3.\ 16384-1/1 = 3.16383/1 = 49149/1 = 49149$, **entonces** $S{\downarrow}14 = 49149$

EJEMPLO 3.

En la siguiente progresión geométrica: 4, 12, 36, 108, …

Calcular el término general de la progresión (a_n) y la suma de los 10 primeros términos (S_{10}).

Lo primero que tenemos que hacer es calcular la **razón** (***r***) de la progresión, pues no la dan directamente geométrica:

$$r = 12/4 = 3\ ,\ \text{también}\ \ r = 36/12 = 3$$

calcular el **término general** (a_n) cuya expresión es: $\mathbf{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$

La razón ya la hemos calculado, ***r = 3***, y el primer término (a_1) nos lo dan en el enunciado (es el primero que aparece en la progresión), $a_1 = 4$. Sustituyendo, tenemos que:

$$\mathbf{a_n = 4 \cdot 3^{n-1}}$$ Término general de la progresión

Ahora vamos a calcular lo otro que nos piden: la **suma de los 10 primeros términos** (S_{10}). Con n= 10

En la expresión de la suma de n términos (S_n)…

$$S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$S_{10} = 4 \cdot \frac{3^{10} - 1}{3 - 1} = 4 \cdot \frac{59049 - 1}{2} = 4 \cdot \frac{59048}{2} = \frac{236192}{2} = 118096$$

https://www.youtube.com/watch?v=qQ4FFRKSF3M

https://www.youtube.com/watch?v=BplpQa_a3UY