GUIA N°1
II SEMESTRE I° MEDIO

Colegio Santa Bárbara
Formando emprendedores que suben escalones

PROFESOR: VÍCTOR RIVERA H.
VICTOR.RIVERA@USACH.CL

Unidad 2: Álgebra y funciones – Productos notables

Objetivo de aprendizaje (OAP3): Desarrollar los productos notables de manera concreta, pictórica y simbólica: Transformando productos en sumas y viceversa, aplicándolas a situaciones concretas, completando el cuadrado de binomio, utilizándolos en la reducción y desarrollo de expresiones algebraicas.

Objetivos específicos: Desarrollar productos notables y factorizar expresiones algebraicas.

Envía tus consultas al correo: victor.rivera@usach.cl

" cada problema tiene en sus manos un regalo para ti "

PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

¿Qué son los productos notables?

Los productos notables son ciertas sumas o restas de términos algebraicos, que son el resultado de ciertas multiplicaciones de factores. Los productos notables nos permiten resolver multiplicaciones de factores sin necesidad de hacerlo paso por paso. Estudiaremos los productos notables en el siguiente orden:

- Cuadrado de un binomio.
- Suma por su diferencia.
- Producto de dos binomios con un término común.

¿Qué es la factorización?

La factorización es el procedimiento que permite escribir sumas o restas de términos algebraicos en multiplicación de factores. Estudiaremos la factorización en el siguiente orden:

- Factorización por un factor en común.
- Factorización mediante productos notables: binomios.
- Factorización mediante productos notables: trinomios.

CUADRADO DE UN BINOMIO

Conceptos

El **cuadrado de un binomio** es igual al cuadrado del primer término, más (o menos si el binomio es una diferencia) el doble del producto del primer por el segundo término, más el cuadrado del segundo término:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo 1

¿Qué expresión resulta al resolver $(3x - 2y)^2$?

PASO A PASO

Cuadrado del primer término. — Doble del producto de los términos. — Cuadrado del segundo término.

1 $(3x - 2y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot (3x) \cdot (2y) + (2y)^2$ → Aplicas la definición.

2 $= 9x^2 - 2 \cdot (3x) \cdot (2y) + 4y^2$ → Aplicas propiedades de las potencias.

3 $= 9x^2 - 12xy + 4y^2$ → Resuelves el doble producto de los términos.

Respuesta: Finalmente, se obtiene que: $(3x - 2y)^2$ es $9x^2 - 12xy + 4y^2$.

más ejemplos:

$$(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(x-7)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 = x^2 - 14x + 49$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(2x-1)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2$$
$$= 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

Ahora, complementemos estos ejemplos con el siguiente video:
https://www.youtube.com/watch?v=9HGpLUvAuhI

SUMA POR SU DIFERENCIA

Conceptos

La **suma por diferencia** corresponde al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término, es decir:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Ejemplo 1

¿Qué expresión resulta al resolver $(2x^2-5)(2x^2+5)$?

Cuadrado del primer término — Cuadrado del segundo término

$$(2x^2-5)(2x^2+5)=(2x^2)^2-(5)^2=4x^4-25$$

Respuesta: Se obtiene la expresión $4x^4-25$.

más ejemplos:

$$(x+3)\cdot(x-3)=x^2-3^2=x^2-9$$

$$(x+7)\cdot(x-7)=x^2-7^2=x^2-49$$

$$(x+y)\cdot(x-y)=x^2-y^2$$

$$(2x+3y)\cdot(2x-3y)=(2x)^2-(3y)^2=4x^2-9y^2$$

$$(2x-5)\cdot(2x+5)=(2x)^2-5^2=4x^2-25$$

Ahora, complementemos estos ejemplos con el siguiente video:
https://www.youtube.com/watch?v=DUm1tD_b-qA

PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CON UN TÉRMINO COMÚN

Conceptos

El **producto de dos binomios con un término común** $(x + a)(x + b)$ es igual al cuadrado del término común (x^2), más el producto de la suma de los dos términos no comunes por el término común $(a + b)x$, más el producto de los términos no comunes (ab).

$$(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Ejemplo 3

¿Cuál es el resultado de $(x + 4)(x + 9)$?

$(x + 4)(x + 9) = (x)^2 + (4 + 9)x + 4 \cdot 9$ → Aplicas el producto notable.

$= x^2 + 13x + 36$ → Calculas.

Respuesta: Se obtiene la expresión $x^2 + 13x + 36$.

más ejemplos:

$(x+3)\cdot(x+5) = x^2 + (3+5)\cdot x + 3\cdot 5$
$= x^2 + 8x + 15$

$(x+5)\cdot(x+7) = x^2 + (5+7)\cdot x + 7\cdot 5$
$= x^2 + 12x + 35$

$(x+2)\cdot(x+1) = x^2 + (2+1)\cdot x + 2\cdot 1$
$= x^2 + 3x + 2$

$(x+1)\cdot(x-2) = x^2 + (1-2)\cdot x + 1\cdot -2$
$= x^2 - x - 2$

$(x+3)\cdot(x-1) = x^2 + (3-1)\cdot x + 3\cdot -1$
$= x^2 + 2x - 3$

Ahora, complementemos estos ejemplos con el siguiente video:
https://www.youtube.com/watch?v=wLj5ULlIfUI

FACTORIZACIÓN POR UN FACTOR EN COMÚN

Conceptos

Factorizar una expresión consiste en escribirla como una multiplicación de expresiones algebraicas.

El **factor común monomio** es el producto del máximo común divisor de los coeficientes de todos los términos por los factores literales comunes de todos los términos con sus respectivos exponentes.

Ejemplo 1

¿Como factorizarías la expresión $7zyx^4 - 8x^5y$?

PASO A PASO

1. Los coeficientes numéricos son 7 y –8, y su máximo común divisor es 1.
2. Los factores literales son zyx^4 y x^5y, y estos tienen en común y y x.
3. En el caso de y, ya que tienen igual exponente, el factor común es y, mientras que en el caso de x su menor exponente es 4, por lo que el factor común será x^4.

Respuesta: Una factorización para la expresión $7zyx^4 - 8x^5y$ será $x^4y(7z - 8x)$.

más ejemplos:

$$9x^3 - 24x^2 = 3x^2 \cdot (3x - 8)$$

$$2x^2y + 6xy^2 = 2xy \cdot (x + 3y)$$

$$x^3y + 5x^2y^2 = x^2y \cdot (x + 5y)$$

$$2x^3y - 4x = 2x \cdot (x^2y - 2)$$

$$2x^3y - 6xy^2 + 4xy = 2xy \cdot (x^2 - 3y + 2)$$

Ahora, complementemos estos ejemplos con el siguiente video:
https://www.youtube.com/watch?v=N5xGLmx9oHE

FACTORIZACIÓN MEDIANTE PRODUCTOS NOTABLES: BINOMIOS

Conceptos

La **diferencia de cuadrados** ($a^2 - b^2$) es igual al producto de la suma por la diferencia de los términos involucrados, es decir:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Ejemplo 1

¿Cómo se factoriza la expresión $81 - 4x^4$?

PASO A PASO

1. La expresión algebraica tiene dos términos, por lo que corresponde a un binomio. Además es una diferencia de cuadrados.

2. Ya que $81 = 9^2$ y además $4x^4 = (2x^2)^2$, se tiene la siguiente igualdad:

$$81 - 4x^4 = 9^2 - (2x^2)^2 = (9 + 2x^2)(9 - 2x^2)$$

Respuesta: Se obtiene que $81 - 4x^4 = (9 + 2x^2)(9 - 2x^2)$.

más ejemplos:

$$x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x+5)\cdot(x-5)$$

$$x^2 - 36 = x^2 - 6^2 = (x+6)\cdot(x-6)$$

$$x^2 - y^2 = (x+y)\cdot(x-y)$$

$$4x^2 - 100 = (2x)^2 - 10^2 = (2x+10)\cdot(2x-10)$$

$$49 - x^2 = 7^2 - x^2 = (7+x)\cdot(7-x)$$

Ahora, complementemos estos ejemplos con el siguiente video:
https://www.youtube.com/watch?v=yb8NsaVXr-M

FACTORIZACIÓN MEDIANTE PRODUCTOS NOTABLES: TRINOMIOS

Conceptos

El trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + a$, con $n \in \mathbb{N}$, se puede **factorizar** como $(x^n + p)(x^n + q)$, si existen valores p y q tal que $p + q = b$ y $p \cdot q = a$:

$$x^{2n} + bx^n + a = (x^n + p)(x^n + q) \text{ con } p + q = b \text{ y } p \cdot q = a.$$

Ejemplo 3

PASO A PASO

¿Cuál es la factorización de $y^2 + 8y - 20$?

1. Respecto del primer término, se tiene, $(y)^2 = y^2$.
2. Determinas dos números p y q, con la condición de que $p + q = 8$ y $p \cdot q = -20$.
3. Los números son 10 y −2, ya que $10 + (-2) = 8$ y $10 \cdot (-2) = -20$.

Respuesta: La factorización de $y^2 + 8y - 20$ es $(y + 10)(y - 2)$.

más ejemplos:

$$x^2 + 6x + 8 = (x + 4) \cdot (x + 2)$$

$$x^2 - 2x - 48 = (x - 8) \cdot (x + 6)$$

$$x^2 - x - 30 = (x - 6) \cdot (x + 5)$$

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5) \cdot (x - 5) = (x - 5)^2$$

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3) \cdot (x + 3) = (x + 3)^2$$

Ahora, complementemos estos ejemplos con el siguiente video:
https://www.youtube.com/watch?v=4bCKKe3mR08

ACTIVIDAD:

I) Desarrolla las siguientes expresiones aplicando **cuadrado de binomio.**

$(x+4)^2$	$(x-9)^2$	$(x+5)^2$	$(2-x)^2$
$(2x-5)^2$	$(3x+4)^2$	$(3x+4y)^2$	$(3x-5y)^2$

II) Desarrolla las siguientes expresiones aplicando **suma por su diferencia.**

$(x+1)\cdot(x-1)$	$(x+4)\cdot(x-4)$	$(x+11)\cdot(x-11)$	$(4+x)\cdot(4-x)$
$(x+9)\cdot(-9+x)$	$(2x+7)\cdot(2x-7)$	$(x^2+1)\cdot(x^2-1)$	$(2x^2+y)\cdot(2x^2-y)$

III) Desarrolla las siguientes expresiones aplicando **producto de dos binomios con un término común.**

$(x+9)\cdot(x+12)$	$(x+11)\cdot(x+7)$	$(x-8)\cdot(x-5)$	$(x+6)\cdot(x-8)$
$(x-9)\cdot(x-2)$	$(x+3)\cdot(x+15)$	$(y-5)\cdot(y+7)$	$(y-2)\cdot(y+13)$

IV) Factoriza las siguientes expresiones mediante un **factor en común.**

$6x^2-24x$	$3x^2-15$	$5y^2-35y$	$7y^3-14y^2$
$5xy^3-xy^2$	$7xy^3-21xy^2$	$x^2y^3-x^3y^2$	$2x^2y^3-4xy^2+6xy$

V) Factoriza las siguientes expresiones mediante **productos notables binomios.**

x^2-49	x^2-81	$16-x^2$	$64-y^2$
$4x^2-100$	$9x^2-25$	$16x^2-y^2$	$25x^2-9y^2$

VI) Factoriza las siguientes expresiones mediante **productos notables trinomios.**

$x^2+11x+10$	x^2-6x+9	$x^2+3x-10$	$x^2-3x-10$
$y^2+8y+16$	$y^2-12y+36$	$2x^2+14x+20$	$3x^2+30x+75$