Colegio
Santa Bárbara
Formando emprendedores que suben escalones

TALLER PRUEBA DE TRANSICIÓN

Eje temático: Algebra y funciones
Unidad Temática: Expresiones algebraicas.
Objetivo: Mostrar que comprenden los productos notables cuadrados y cúbicos, las operaciones algebraicas y la factorización de polinomios. :
Habilidades: Reconocer, aplicar, resolver y calcular

Profesor: Nèstor Albano
Correo: nalbano1@gmail.com

https://www.youtube.com/watch?v=Ibe_kqg7uRs

https://www.youtube.com/watch?v=athYuPXPkeY

https://www.youtube.com/watch?v=o6PkQJEQqI4&list=PLC6o1uTspYwGZ0Uc88U7suZIA784fjzzj

Definición de factorización: Es la **descomposición de un polinomio** en el producto de otros polinomios de grado inferior o a la expresión de un número entero a partir del producto de sus divisiones.

Tipos de Factorizaciòn.

Diferencia de cuadrados: Es la diferencia de dos expresiones que tiene raíces cuadradas exactas. Una diferencia de cuadrados es igual a suma por diferencia.

$\boxed{x^2 - y^2 = (x+y).(x-y) \quad \textit{y tambien se utiliza de esta forma} \quad (x+y).(x-y) = x^2 - y^2}$

Observación: Para sacar la raiz cuadrada de una variable elevada a una potencia, solo hay que dividir el exponente entre dos.

Ejemplo: factorizar. Para resolver, solo debemos sacar la raiz cuadrada a cada tèrmino.

Usaremos : $\boxed{x^2 - y^2 = (x+y).(x-y)}$

1. $x^6 - 25 = (x^3 + 5).(x^3 - 5)$

$\sqrt{x^6} = x^3 \qquad \sqrt{25} = 5$

2. $4X^8 - 49 = (2x^4 + 7).(2x^4 - 7)$

$\sqrt{4x^8} = 2x^4 \qquad \sqrt{49} = 7$

Ahora usaremos el otro sentido de la igualdad, en la diferencia de cuadrados: $\boxed{(x+y).(x-y) = x^2 - y^2}$

Ejemplo 2. Factorizar: Solo debemos elevar al cuadrado cada uno de los términos.

1) $(7x^3 + 9y^7)\cdot(7x^3 - 9y^7) = (7x^3)^2 - (9y^7)^2 = \underline{|49x^6 - 81y^{14}}$

2) $(6a^5 + 8y^4z^9)\cdot(6a^5 - 8y^4z^9) = (6a^5)^2 - (8y^4z^9)^2 = \underline{|36a^{10} - 64y^8z^{18}}$

2. Trinomio cuadrado perfecto: (TCP)

✓ **Características y cuándo aplicarla**

El trinomio debe estar organizado en forma ascendente o descendente (cualquiera de las dos). - Tanto el primero como el tercer término deben ser positivos. Asimismo, esos dos términos deben ser cuadrados perfectos (es decir, deben tener raíz cuadrada exacta). En otras palabras, el primero y el tercer término deben reunir las características de los términos que conforman una Diferencia de Cuadrados Perfectos.

✓ **Cómo realizar la factorización**

Primero debemos verificar que se trata de un Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP). Para ello extraemos la raíz cuadrada tanto del primer como del tercer término. - Realizamos el doble producto de las raíces obtenidas y comparamos con el segundo término (sin fijarnos en el signo de éste). Si efectivamente nos da, entonces tenemos un TCP. - La factorización de un TCP es un binomio al cuadrado, que se construye anotando las raíces cuadradas del primer y tercer término, y entre ellas el signo del segundo término. Vamos ahora con los ejemplos.

Ejemplos: Factorizar: Trinomios cuadrados perfectos.

1. $4x^2 + 12x + 9$

Como cumple con las condiciones, procedemos a extraer la raiz cuadrada del primer y tercer tèrmino.

$\sqrt{4x^2} = 2x \qquad \sqrt{9} = 3$

ahora realizamos el doble producto de las raices obtenidas

$2.2x.3 = 12x$ (*Nótese que nos dio como resultado el segundo término, luego tenemos un trinomio cuadrado perfecto.*)

Su factorizaciòn queda asì: $(2x+3)^2$

$2.\ 16x^2 + 72x + 81$

Como cumple con las condiciones, procedemos a extraer la raiz cuadrada del primer y tercer tèrmino.

$\sqrt{16x^2} = 4x \qquad \sqrt{81} = 9$

Realizamos el doble proucto de las raices obtenidas.

$2.4x.9 = 72x$ (*El resultado es el segundo tèrmino. Luego tenemos un trinomio cuadrado perfecto*)

Su factorizaiòn queda asì : $(4x+9)^2$

3. Trinomio de la forma: $\boxed{x^2 \pm bx \pm c}$

Características y cuándo aplicarla.

El trinomio debe estar organizado en forma descendente. - El coeficiente del primer término debe ser uno (1).
El grado (exponente) del primer término debe ser el doble del grado (exponente) del segundo término.

Cómo realizar la factorización.

Se abren dos grupos de paréntesis. - Se le extrae la raíz cuadrada al primer término y se anota al comienzo de cada paréntesis.
- **<u>Se definen los signos: el signo del primer paréntesis se obtiene al multiplicar los signos del primer y segundo término; el signo del segundo paréntesis se obtiene al multiplicar los signos del segundo y tercer término.</u>** - Buscamos dos cantidades que multiplicadas den como resultado el término independiente (es decir c), y que sumadas den como resultado el coeficiente del segundo término (es decir b). - Se anotan las cantidades que satisfacen las condiciones anteriores en los espacios en blanco de cada paréntesis, en sus lugares respectivos.

Ejemplo: Factorizar:

1. $x^2 - 2x - 15$

Abrimos dos grupos de parèntesis: $= (\qquad).(\qquad)$

Extraemos la raìz cuadrada del primer tèrmino $\left(\sqrt{x^2} = x\right)$ *y la anotamos al comienzo de cada parentèsis:* $= (x \qquad).(x \qquad)$

Definimos los signos de cada parentèsis: $= (x - \quad).(x + \quad)$

Ahora se buscan dos nùmeros que multiplicadas den -15 *y que sumadas den* -2. *Se trata de* -5 *y* 3.

Entonces anotamos esos nùmeros en los espacios en blanco y queda a la factorizaciòn asì:

$(x-5).(x+3)$

2. $x^2 + 4x - 12$

Abimos dos grupos de Parèntesis: $= (\qquad).(\qquad)$

Extraemos raìz cuadrada del primer tèrmino: $= \left(\sqrt{x2} = x\right)$ *y la anotamos al comienzo de cada parèntesis.*

Definimos los signos en cada parèntesis: $= (x + \quad).(x - \quad)$

Se buscan dos nùmeros que multiplicados den -12 *y que sumados den* 4.

Se tratan de 6 *y* -2. *Anotamos esos numeros en los espacios en blanco. Y queda lista la factorizaciòn asì:*

$(x+6).(x-2)$

4. Trinomio de la forma: $\boxed{ax^2 \pm bx \pm c}$

Características y cuándo aplicarla

El trinomio debe estar organizado en forma descendente. - El coeficiente principal (es decir, del primer término) debe ser positivo y diferente de uno (a≠1). - El grado (exponente) del primer término debe ser el doble del grado (exponente) del segundo término.

Cómo realizar la factorizaciòn

- Debemos multiplicar y dividir el trinomio por el coeficiente principal, es decir, a. En el numerador efectuamos la propiedad distributiva teniendo presente que en el segundo término el producto no se realiza sino que se deja expresado: la cantidad que entra y la variable quedan agrupadas dentro de un paréntesis y el coeficiente original queda por fuera. Se expresa el primer término como el cuadrado de lo que quedó en paréntesis en el segundo término. - Aplicamos caso anterior (Trinomio de la forma $x^2 \pm bx \pm c$) en el numerador. Aplicamos (Factor común) en los paréntesis formados. Finalmente, simplificamos la fracción (para eliminar el denominador).

Ejemplo . Factorizar:

1. $6x^2 + 5x - 4$

Multiplicamos y dividimos el trinomio por 6, que es el coeficiente principal:

$$= \frac{6(6x^2 + 5x - 4)}{6}$$

En el numerador, multiplicamos por 6, cuidando dejar el producto indicado en el segundo tèrmino (el 6 se adhiere a la variablex y queda dentro de un parèntesis). Observe que el coeficiente original del segundo tèrmino (es decir 5 queda por fuera): $= \dfrac{36x^2 + 5(6x) - 24}{6}$

Expresamos el primer tèrmino como el cuadrado de lo que quedò en el parèntesis en el segundo

tèrmino: $= \dfrac{(6x)^2 + 5(6x) - 24}{6}$

Aplicamos el caso anterior de factorizaciòn $\left(ax^2 \pm bx \pm c\right)$ en el numerador:

$(6x)^2 + 5(6x) - 24$

Abrimos dos grupos de parèntesisy repartimos 6x en cada uno de ellos: $\dfrac{(6x \qquad).(6x \qquad)}{6}$

Definimos los signos: $= \dfrac{(6x+ \qquad).(6x- \qquad).}{6}$

Buscamos dos nùmeros que multiplicados nos den -24 y que sumados nos de 5.

Se tratan de 8 y -3. Entonces la factorizaciòn el el nùmerador queda asì:

$$= \frac{(6x+8).(6x-3)}{6}$$

Ahora aplicamos factor comùn a los parèntesis formadosy el 6 del denominador lo escribimos

como 2 por 3:

$$= \frac{2(3x+4).3(2x-1)}{2.3}$$

Por ultimo simplificamos el 2 y el 3 con el denominador y de esta manera llegamos ala factorizaciòn

del trinomio propuesto.

$(3x+4).(2x-1)$

Factor Común:

✓ **Características y cuando aplicarlo.**

Se aplica en binomios, trinomios y polinomios . No aplica para monomios. - Es el primer caso que se debe inspeccionar cuando se trata de factorizar un polinomio.- El factor común es aquello que se encuentra multiplicando en cada uno de los términos. Puede ser un número, una letra, varias letras, un signo negativo, una expresión algebraica (encerrada en paréntesis) o combinaciones de todo lo anterior.

✓ **Como realizar la factorización.**

De los coeficientes de los términos se extrae el M.C.D (Máximo común divisor) de ellos. - De las letras o expresiones en paréntesis repetidas, se extrae la de menor exponente. Se escribe el factor común, seguido de un paréntesis donde se anota el polinomio que queda después de que el factor común ha abandonado cada término

Ejemplos : Factor Común

1) $5x+5y=5(x+y)$ 2) $10a-15b=5(2a-3b)$ 3) $mp+mq-mr=m(p+q-r)$

4) $x(a+1)-t(a+1)+5(a+1)=(a+1)(x-t+5)$ 5) $15\mathrm{a}^2+20a^3.b-10a=5a.(3a+4a^2b-2)$

Productos notables.

1) Binomio al cuadrado o cuadrado de un binomio:

Para elevar un binomio al cuadrado (es decir, multiplicarlo por sí mismo), se suman los cuadrados de cada término con el doble del producto de ellos. Así : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ Nota: $(a+b).(a+b)=(a+b)^2$ y $(a-b).(a-b)=(a-b)^2$

Cuadrado de la suma: $\underline{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$ Cuadrado de la resta: $\underline{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$

2) Binomio al cúbo.

Cúbo de una suma : Se *suman, sucesivamente*: *El cubo del primer término con el triple producto del cuadrado del primero por el segundo. El triple producto del primero por el cuadrado del segundo. El cubo del segundo término*. Cúbo de una suma: $\underline{|(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

Cúbo de una resta : *El cubo del primer término*. Menos *el triple producto del cuadrado del primero por el segundo*. Más *el triple producto del primero por el cuadrado del segundo*. Menos *el cubo del segundo término*. $\underline{|(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$

Ejemplos : 1) $(x+2)^3 = (x)^3 + 3\cdot(x)^2\cdot(2) + 3\cdot(x)\cdot(2)^2 + 2^3 \rightarrow (x+2)^3 = \underline{|\mathrm{x}^3 + 6x^2 + 12x + 8}$

2) $(x-4)^3 = (x)^3 - 3\cdot(x)^2\cdot(4) + 3\cdot(x).(4)^2 - 4^3$

$(x-4)^3 = \underline{|x^3 - 12x^2 + 48x - 64}$

3) $(5a^4 + 2b^6)^3 = (5a^4)^3 + 3\cdot(5a^4)^2\cdot(2b^6) + 3(5a^4)\cdot(2b^6)^2 + \left(2b^6\right)^3$

$(5a^4 + 2b^6)^3 = 125a^{12} + 3\cdot(25a^8)\cdot(2b^6) + 15a^4\cdot 4b^{12} + 8b^{18} = \underline{|125a^{12} + 150a^8b^6 + 60a^4b^{12} + 8b^{18}}$

Operatoria con expresiones algebraicas

Expresión algebraica: Es el resultado de combinar, mediante la operación de adición, uno o más términos algebraicos.

Ejemplo: Reduce Términos semejantes.

Nota: Terminos semejantes son aquellos que tiene iguales la parte literal.

$$1)\ -20x^3 + 89x^2 - 4x - 43x^3 - 65x^2 + \frac{2}{3}x =$$

$$(-20x^3 - 43x^3) + (89x^2 - 65x^2) + (-4x + \frac{2}{3}x)$$

$$= \underline{\left| -63x^3 + 24x^2 - \frac{10}{3}x \right.}$$

$$2)\ 3x - 2x\left(2x+3\right) + \left(3x+2\right)\cdot\left(3x-2\right) = -4$$

$$3x - 4x^2 - 6x + 9x^2 - 4 =$$

$$(3x - 6x) + \left(-4x^2 + 9x^2\right) = \underline{|5x^2 - 3x - 4}$$

$3) -3x^3 \cdot (x-2)\cdot(-3x^3-3x) + 2x^3 \cdot (2x^2-3x)^2 =$

$(2x^2-3x)^2 = 4x^4 - 12x^3 + 9x^2$ (producto notable)

$(x-2)\cdot(-3x^3-3x) =$ Multiplicar. Aplicando propiedad distributiva

$= -3x^3 \cdot \left[-3x^4 - 3x^2 + 6x^3 + 6x\right] + 2x^3 \cdot \left[4x^4 - 12x^3 + 9x^2\right]$

$= 9x^7 + 9x^5 - 18x^6 - 18x^4 + 8x^7 - 24x^6 + 18x^5$

$= (9x^7 + 8x^7) + (-18x^6 - 24x^6) + (9x^5 + 18x^5) - 18x^4$

$= 17x^7 - 42x^6 + 27x^5 - 18x^4$

$Sol: -3x^3 \cdot (x-2)\cdot(-3x^3-3x) + 2x^3 \cdot (2x^2-3x)^2 = \underline{17x^7 - 42x^6 + 27x^5 - 18x^4}$

$4) -2x \cdot (x^2-2x)\cdot\left(-2x^2+4x-4\right) =$

$(x^2-2x)\cdot\left(-2x^2+4x-4\right) =$ Multiplicar. Aplicando propiedad distributiva

$= -2x \cdot \left[-2x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x^3 - 8x^2 + 8x\right]$

$= -2x\left[-2x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 8x\right]$

$= 4x^5 - 16x^4 + 24x^3 - 16x^2$

$Sol: -2x \cdot (x^2-2x)\cdot\left(-2x^2+4x-4\right) = \underline{4x^5 - 16x^4 + 24x^3 - 16x^2}$

1) Ricardo efectúa el siguiente procedimiento para reducir la expresión: $2(2x-5)^2-10(2x+3)$

$a)-8x^2-60x+20$ b) $8x^2-60x+20$ c) $-8x^2+60x+20$

d) $8x^2-60x-20$ e) $-8x^2-60x-20$

2) $Si\ p=x^2+4ax+a^2$. ¿ Cuál(es) de las siguientes expresiones se puede(n) factorizar como un producto de binomio perfecto.

I) $p+3x^2$

II) $p-a^2$

III) $p-6ax$

a) Solo I b) Solo II c) Solo I y III

d) Solo II y III e) I,II,III

3) Si la ecuación en x , $(5x-n)^2=0$ tiene como solución x=2, ¿ Cuál es el valor de n?

a)10 b) -8 c)12

d)$\sqrt{96}$ e)$\sqrt{6}$