

GUÍA N°3 – II° SEMESTRE - MATEMÁTICA - I° MEDIO

Unidad 4: Probabilidad – Propiedades de la probabilidad

Nombre:

Curso:

Objetivo de aprendizaje (OAP14): Desarrollar las reglas de las probabilidades, la regla aditiva, la regla multiplicativa y la combinación de ambas, de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, en el contexto de la resolución de problemas.

Objetivo específico: Desarrollar la regla aditiva y multiplicativa de la probabilidad y aplicarla en la resolución de problemas.

Indicaciones: Estimado(a) estudiante, lee cuidadosamente esta guía y desarrolla las actividades que aparecen en ella. Recuerda que puedes hacerlo en tu cuaderno o en la misma guía impresa.

¿Por qué aprender acerca de las probabilidades?

Usamos con frecuencia la noción de probabilidades. La predicción del tiempo es un ejemplo “para hoy se anunció precipitaciones moderadas con un 80% de probabilidades”. Todos realizamos una suerte de calculatoria de probabilidades al tomar decisiones. Por ejemplo, si estamos en una fila. ¿Qué camino tomar? ¿Espero o es muy improbable que ocurra? Los matemáticos han desarrollado teoría para afinar nuestra capacidad de predicción.

Antes de empezar con las propiedades de la probabilidad, recordemos la definición de probabilidad.

Probabilidad: Es la posibilidad de que ocurra un determinado suceso. En otras palabras, nos permite determinar la certeza o duda de que un suceso ocurra o no.

$$P(A) = \frac{\text{números de casos favorables}}{\text{número de casos totales}}$$

Ejemplo:

En una tómbola hay 4 bolas rojas, 2 azules y 1 amarilla. Si se saca una bola al azar ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja?

Primero encontramos el número de casos totales: $4 + 2 + 1 = 7$ (son 7 bolas en total).

Luego identificamos el número de casos favorables de sacar una bola roja: 4.

Ahora calculamos la probabilidad de sacar una bola roja: $P(A) = \frac{4}{7}$

¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola azul?

Identificamos el número de casos favorables de sacar una bola azul: 2.

Ahora calculamos la probabilidad de sacar una bola azul: $P(B) = \frac{2}{7}$

¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola verde?

Identificamos el número de casos favorables de sacar una bola verde: 0 (porque no hay bolas verdes).

Ahora calculamos la probabilidad de sacar una bola verde: $P(C) = \frac{0}{7} = 0$

Complementemos estos ejemplos con el siguiente video:

<https://www.youtube.com/watch?v=WeeEE8o1aqM>

Regla multiplicativa de la probabilidad

Usamos la regla multiplicativa de las probabilidades cuando, dados dos sucesos independientes (la ocurrencia de uno no depende de la ocurrencia de otro) y se quiere conocer la probabilidad de que se den ambos.

Probabilidad de la intersección de dos sucesos, para A y B sucesos independientes entre sí.

Regla multiplicativa:

$$P(A \text{ y } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Ejemplo:

Si en una bolsa hay 3 bolitas rojas y 2 bolitas verdes, ¿cuál es la probabilidad de sacar primero una bolita roja y después una verde, sin reposición?

Primero definimos los eventos:

R = sacar una bolita roja

V = sacar una bolita verde

La probabilidad de sacar primero una bolita roja es: $P(R) = \frac{3}{5}$

La probabilidad de sacar en segundo lugar una bolita verde es: $P(V) = \frac{2}{4}$

Entonces: $P(R \text{ y } V) = P(R \cap V) = P(R) \times P(V) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

La probabilidad de sacar una bolita roja y una verde es menor que cada una de las probabilidades individuales.

Veamos otro ejemplo:

Ejemplo 2

Considera el experimento de lanzar dos veces una moneda al aire y observar el resultado que se obtiene. Considera los siguientes eventos:

A: En el primer lanzamiento se obtiene una cara.

B: En el segundo lanzamiento se obtiene una cara.

Los eventos A y B, ¿son independientes?

1 Describe el espacio muestral y los eventos.

$$\Omega = \{cc, cs, sc, ss\} \quad A = \{cc, cs\} \quad B = \{sc, cc\} \quad A \cap B = \{cc\}$$

PASO A PASO

2 Calcula la probabilidad de los eventos A, B y de su intersección.

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

3 Compruebas que los eventos sean independientes usando la definición:

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A \cap B)$$

Respuesta: Los eventos son independientes. Esto también se refleja en el hecho de que los resultados de lanzar una moneda no tienen relación con los resultados obtenidos en otros lanzamientos.

Regla aditiva de la probabilidad

Por otra parte, la regla aditiva es útil cuando se tienen dos eventos y se quiere conocer la probabilidad de que ocurra al menos uno de ellos.

Probabilidad de la unión de dos sucesos, para A y B sucesos excluyentes.

Regla aditiva:

$$P(A \text{ o } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ejemplo:

Sigamos con el ejemplo de la bolsa con 3 bolitas rojas y 2 bolitas verdes ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bolita roja o una bolita verde?

Como los eventos R y V son mutuamente excluyentes (no tienen elementos en común, en este caso la bolita puede ser roja o verde).

La probabilidad de sacar una bolita roja es: $P(R) = \frac{3}{5}$

La probabilidad de sacar una bolita verde es: $P(V) = \frac{2}{5}$

Entonces: $P(R \text{ o } V) = P(R \cup V) = P(R) + P(V) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1$

Esto es, probabilidad 1, la certeza. En efecto si se saca una bolita o es roja o es verde, esto es, ya se cumplió la condición.

Veamos otro ejemplo:

Ejemplo 1

Se extrae al azar una carta de una baraja inglesa. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta extraída sea un trébol o una J de corazón?

Para resolver el problema, puedes seguir estos pasos.

- 1 Identificas los eventos involucrados. En este caso son:
El evento A , como aquel en que la carta extraída fue una J de corazón.
El evento B , como aquel en que la carta extraída fue un trébol.
- 2 Verificas si los eventos son disjuntos. Para esto, debes determinar si los eventos pueden ocurrir de forma simultánea. En este caso, la respuesta es no, porque una carta no puede ser trébol y corazón a la vez, es decir, los eventos son disjuntos.
- 3 Por lo anterior, la probabilidad de la unión de los eventos será calculada simplemente por $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- 4 Calculas la probabilidad de cada evento, $P(A) = \frac{1}{52}$ y $P(B) = \frac{13}{52}$. Entonces,

$$P(A \cup B) = \frac{1}{52} + \frac{13}{52} = \frac{14}{52} = \frac{7}{26}$$

Respuesta: La probabilidad de que la carta extraída sea un trébol o una J de corazón es $\frac{7}{26}$.

Actividades

Actividad 1. Se lanzan dos dados (de 6 caras cada dado) en una mesa.

1. Calcula la probabilidad de los siguientes eventos.
 - a) Que la suma de los puntos sea 7.
 - b) Que la suma de los puntos sea 8.
 - c) Que la suma de los puntos sea menor que 4.
 - d) Que la suma de los puntos sea mayor que 9.

Recuerda que primero debes encontrar el número de casos totales, en este caso es recomendable describir el espacio muestral:

1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6
2-1, 2-2, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6
... y así sucesivamente

2. Ocupando la regla aditiva de la probabilidad, calcula las siguientes probabilidades.
 - a) Que la suma de los puntos sea 7 o 8.
 - b) Que la suma de los puntos sea 7 o menor que 4.
 - c) Que la suma de los puntos sea 7 o mayor que 9.
 - d) Que la suma de los puntos sea 8 o menor que 4.
 - e) Que la suma de los puntos sea 8 o mayor que 9.
 - f) Que la suma de los puntos sea menor que 4 o mayor que 9.

Actividad 2. Se extrae una bolita de una tómbola que contiene 25 bolitas enumeradas del 1 al 25.

1. Calcula la probabilidad de los siguientes eventos.
 - a) Que la bolita sea un número menor a 10.
 - b) Que la bolita sea un número mayor o igual a 20.
 - c) Que la bolita sea un número mayor o igual a 14 y menor o igual a 17.
2. Ocupando la regla aditiva de la probabilidad, calcula las siguientes probabilidades.
 - a) Que la bolita sea un número menor a 10 o mayor o igual a 20.
 - b) Que la bolita sea un número menor a 10 o mayor o igual a 14 y menor o igual a 17.
 - c) Que la bolita sea un número mayor o igual a 20 o mayor o igual a 14 y menor o igual a 17.

Actividad 3. Se lanza tres veces una moneda al aire.

1. Ocupando la regla multiplicativa de la probabilidad, calcula las siguientes probabilidades.
 - a) Que en el primer lanzamiento se obtenga una cara, que en el segundo lanzamiento se obtenga un sello y que en el tercer lanzamiento se obtenga una cara.
 - b) Que en el primer lanzamiento se obtenga un sello, que en el segundo lanzamiento se obtenga un sello y que en el tercer lanzamiento se obtenga una cara.
 - c) Que en el primer lanzamiento se obtenga un sello, que en el segundo lanzamiento se obtenga una cara y que en el tercer lanzamiento se obtenga una cara.